

Info Artikel:	Direvisi pada 11 Mei 2021
Disubmit pada 24 April 2021	Diterima pada 12 Mei 2021
Direview pada 2 Mei 2021	Tersedia secara daring pada 16 Mei 2021

---

**DIMENSI METRIK PADA GRAF CALENDULA ( $Cl_{3,n}$ )****M. A. Shulhany<sup>1</sup>, Agusutrisno Agusutrisno<sup>2</sup>, Frena Fardillah<sup>3</sup>**<sup>1,2</sup> Jurusan Teknik Sipil, Fakultas Teknik, Universitas Sultan Ageng Tirtayasa<sup>3</sup> Jurusan Teknik Industri, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah TangerangAlamat email: [ahmad.s@untirta.ac.id](mailto:ahmad.s@untirta.ac.id)

**ABSTRAK.** Semua graf  $G = (V_G, E_G)$  yang dibahas pada penelitian ini merupakan graf tak-berarah, sederhana, dan berhingga. Misalkan  $s$  adalah sebuah sisi graf  $H$ . Hasil kali sisir sisi antara graf  $G$  dan graf  $L$ , dinotasikan dengan  $G \cong L$ , merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan  $G$  dan  $|E_G|$  buah salinan  $L$  dan mencangkokkan sisi  $s$  pada salinan ke- $i$  dari  $L$  ke sisi ke- $i$  dari  $G$ . Misalkan  $T = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  merupakan himpunan bagian terurut dari titik-titik pada  $G$  yang anggota telah ditentukan. Representasi metrik dari  $u \in V_G$  terhadap  $T$ , dan dinotasikan dengan vektor  $\lambda(u|T) = \{d(u, t_1), d(u, t_2), \dots, d(u, t_k)\}$ . Dimensi metrik pada  $G$  adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan  $T$  pada  $G$  sehingga  $r(u_1|W) \neq d(u_2|W)$ , dengan  $u_1 \neq u_2$ . Pada penelitian ini, dibahas dimensi metrik untuk graf calendula ( $Cl_{3,n}$ ).

**Kata Kunci:** Dimensi metrik, Representasi metrik, Graf Calendula.

**ABSTRACT.** All graphs  $G = (V_G, E_G)$  in this study are undirected, simple, and finite graphs. Let  $s$  be a edge of  $H$ . The edge-comb product between  $G$  and  $L$ , denoted  $G \cong L$ , is a graph obtained by taking one copy of  $G$  and  $|E_G|$  copies of  $L$  and grafting  $s$  in the  $i$ -th edge of  $L$  to the  $i$ -th edge of  $G$ . Let  $T = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  be an ordered subset of vertices set in  $G$  that have been determined. The metric representation of  $u \in V_G$  with respect to  $T$ , is denoted by  $\lambda(u|T) = (d(u, t_1), d(u, t_2), \dots, d(u, t_k))$ . The metric dimension of  $G$  is the minimum cardinality of all sets  $T$  in  $G$  such that  $r(u_1|W) \neq d(u_2|W)$ , which  $u_1 \neq u_2$ . This research discusses the metric dimensions of the marigold graphs ( $Cl_{3,n}$ ).

**Keyword:** Metric dimension, Metric representation, Marigold graphs

**I. PENDAHULUAN**

Graf  $G = (V_G, E_G)$  merupakan pasangan terurut himpunan titik  $V_G$  dan himpunan sisi  $E_G \subseteq [V_G]^2$ . Semua graf yang dibahas pada penelitian ini merupakan graf tak-berarah, sederhana, dan berhingga. Misalkan  $s$  adalah sebuah sisi graf  $H$ . Hasil kali sisir sisi antara graf  $G$  dan graf  $L$ , dinotasikan dengan  $G \cong L$ , merupakan graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah salinan  $G$  dan  $|E_G|$  buah salinan  $L$  dan mencangkokkan sisi  $s$  pada salinan ke- $i$  dari  $L$  ke sisi ke- $i$  dari  $G$  (Dafik, dkk., 2017).

Misalkan  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  merupakan himpunan bagian terurut dari titik-titik graf  $G$  yang anggota telah ditentukan. Representasi titik  $u \in V_G$  terhadap  $T$ , dinotasikan dengan vektor

$$\lambda(u|T) = \{d(u, t_1), d(u, t_2), \dots, d(u, t_n)\}.$$

Himpunan  $W$  disebut himpunan pemisah pada  $G$ , jika untuk setiap titik  $u, v$  pada  $V_G$  dan  $u \neq v$  mengakibatkan  $\lambda(u|T) \neq \lambda(v|T)$  (Chartrand, dkk., 2000; Harary & Melter, 1976).

Dimensi metrik pada  $G$  adalah kardinalitas minimum dari semua himpunan pemisah pada  $G$ . Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik sebagai berikut:

**Teorema 1.** (Harary & Melter, 1976) Graf  $G$  berorde  $n \geq 2$  yang memiliki dimensi metrik satu jika dan hanya jika  $G$  adalah graf lintasan  $P_n$ .

**Teorema 2.** (Harary & Melter, 1976) Graf  $G$  berorde  $n \geq 2$  yang memiliki dimensi metrik  $n - 1$  jika dan hanya jika  $G$  adalah graf lengkap  $K_n$ .

**Akibat 3.** Jika  $G$  berorde  $n \geq 2$ , bukan graf lengkap  $K_n$ , dan bukan graf lintasan  $P_n$ , maka

$$2 \leq \dim(G) \leq n - 2. \quad (1)$$

**Teorema 4.** (Chartrand, dkk., 2000) Graf  $G$  berorde  $n \geq 4$  yang memiliki dimensi metrik  $n - 2$  jika dan hanya jika  $G = K_{s,t}$ , dengan  $s, t \geq 1$  atau  $G = K_s + \bar{K}_t$ , atau  $G = K_s + (K_1 \cup K_t)$ , dengan  $s, t \geq 1$ .

**Teorema 5.** (Chartrand, dkk., 2000) Graf  $G$  berorde  $n \geq 3$ , berdiameter  $d$ , dan  $f(n, d)$  adalah bilangan positif  $k$  terkecil sehingga  $k + d^k \geq n$ , maka

$$f(n, d) \leq \dim(G) \leq n - d. \quad (2)$$

Penelitian lain terkait dimensi matrik yaitu Cáceres, J., dkk (2007) meneliti hasilkali Kartesian, Díaz, dkk (2012) dan Hauptmann, dkk (2012) meneliti kompleksitas dimensi metrik, Fehr, dkk (2006) meneliti tentang digraf Cayley, Hernando, dkk (2010) meneliti dimensi metrik dilihat dari teori graf ekstermal, serta Tomescu dan Javaid (2007) meneliti graf Jahangir.

## II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah metode pencarian pola dengan langkah-langkah berikut:

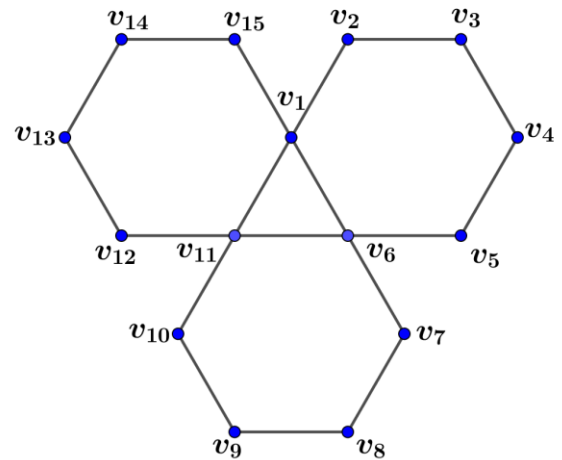
- Menentukan graf yang dianalisa
- Menentukan nama titik-titik di graf sehingga bisa diidentifikasi
- Menentukan dugaan awal dari dimensi matrik graf
- Membuat pembuktian awal yang berisi pembuktian batas bawah dan batas atas dari graf
- Membuat kesimpulan dari pembuktian

## III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, dibahas dimensi matrik untuk graf calendula ( $Cl_{3,n}$ ). Misalkan  $n$  merupakan bilangan asli dengan  $n \geq 3$ .

Graf calendula berorde  $3n - 3$  dinotasikan dengan  $Cl_{3,n}$  merupakan graf hasil kali sisi sisi dari graf lingkaran berorde 3 dan graf lingkaran berorde  $n$ , dinotasikan dengan  $C_3 \oplus C_n$ . Graf  $Cl_{3,n}$  merupakan graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi masing-masing sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V(Sf_n) &= \{v_i | 1 \leq i \leq 3n - 3\} \\ E(Sf_n) &= \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq 3n - 4\} \cup \\ &\{v_1 v_{3n-3}\} \cup \{v_1 v_n\} \cup \{v_1 v_{2n-1}\} \cup \\ &\{v_n v_{2n-1}\} \end{aligned}$$



**Gambar 1.** Ilustrasi graf  $Sf_n$ .

**Teorema 6.** Misalkan  $n \geq 3$  merupakan bilangan asli. Jika  $Cl_{3,n}$  merupakan graf calendula berorde  $3n - 3$ , maka

$$\dim(Cl_{3,n}) = 2.$$

**Bukti.**

Misalkan  $n \geq 3$  merupakan bilangan asli. Graf  $Cl_{3,n}$  merupakan graf calendula berorde  $3n - 3$ . Pertama, akan ditunjukkan bahwa  $diam(Cl_{3,n}) \geq 2$ . Berdasarkan Akibat 3, kita peroleh  $diam(Cl_{3,n}) \geq 2$ . Kedua, akan ditunjukkan bahwa  $diam(Cl_{3,n}) \leq 2$  dengan menentukan sebuah himpunan pemisah pada  $Cl_{3,n}$  dengan 2 titik. Pilih sebuah himpunan pemisah  $T = \left\{ v_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, v_{\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor} \right\}$ . Representasi dari titik-titik  $v_i$  dengan  $T$  adalah

1.  $\lambda(v_i|T) = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - i, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + i - 1\right)$ , untuk  $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ;
2.  $\lambda(v_i|T) = \left(i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - i\right)$ , untuk  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 1$ ;
3.  $\lambda(v_i|T) = \left(\left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor - i - 1, i - \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor\right)$ , untuk  $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor \leq i \leq 2n - 1$ ;
4.  $\lambda(v_i|T) = \left(i - \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 1, i - \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor\right)$ , untuk  $2n \leq i \leq \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor - 2$ ;
5.  $\lambda(v_i|T) = (n - 1, n - 1)$ , untuk  $i = \left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor - 1$  dan bilangan ganjil  $n \geq 3$ ;
6.  $\lambda(v_i|T) = \left(\frac{1}{2}(7n - 5) - i, \frac{1}{2}(7n - 3) - i\right)$ , untuk  $\left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor \leq i \leq 3n - 3$  dan bilangan ganjil  $n \geq 3$ ;
7.  $\lambda(v_i|T) = \left(\frac{1}{2}(7n - 6) - i, \frac{1}{2}(7n - 4) - i\right)$ , untuk  $\left\lfloor \frac{5n}{2} \right\rfloor - 1 \leq i \leq 3n - 3$  dan bilangan genap  $n \geq 4$ ;

Melalui pemeriksaan secara langsung, terlihat bahwa  $\lambda(u|T) \neq \lambda(v|T)$ , untuk setiap pasang titik  $u, v \in V_{Cl_{3,n}}$ , dan  $u \neq v$ . Sehingga, himpunan  $T$  merupakan himpunan pemisah.

Dari pernyataan satu didapat  $diam(Cl_{3,n}) \geq 2$  dan pernyataan dua didapat  $diam(Cl_{3,n}) \leq 2$ , maka  $diam(Cl_{3,n}) = 2$ . ■

#### IV. SIMPULAN

Misalkan  $n$  merupakan bilangan bulat positif dan  $n \geq 3$ . Jika  $Cl_{3,n}$  merupakan graf calendula berorde  $3n - 3$ , maka dimensi metriknya  $\dim(Cl_{3,n}) = 2$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Puertas, M. L., Seara, C., & Wood, D. R.

(2007). On the metric dimension of cartesian products of graphs. *SIAM journal on discrete mathematics*, 21(2), 423–441.

Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M. A., & Oellermann, O. R. (2000). Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 105(1–3), 99–113.

Dafik, Agustin, I. H., Nurvitaningrum, A. I., & Prihandini, R. M.. (2017). On super H-antimagicness of an edge comb product of graphs with subgraph as a terminal of its amalgamation. *Journal of Physics: Conference Series*, 855(1), 12010.

Díaz, J., Pottonen, O., Serna, M., & Van Leeuwen, E. J. (2012). On the complexity of metric dimension. *European Symposium on Algorithms*, 419–430.

Fehr, M., Gosselin, S., & Oellermann, O. R. (2006). The metric dimension of Cayley digraphs. *Discrete mathematics*, 306(1), 31–41.

Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the metric dimension of a graph. *Ars combin*, 2(191–195), 1.

Hauptmann, M., Schmied, R., & Viehmann, C. (2012). Approximation complexity of metric dimension problem. *Journal of Discrete Algorithms*, 14, 214–222.

Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Seara, C., & Wood, D. R. (2010). Extremal graph theory for metric dimension and diameter. *The Electronic Journal of Combinatorics [electronic only]*, 17(1), Research-Paper.

Tomescu, I., & Javaid, I. (2007). On the metric dimension of the Jahangir graph. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 371–376.