ASIMETRIS:
Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains

p-ISSN 2721 - 8724 e-ISSN 2722 – 0214
ASIMETRIS VOL 1 (NO 1) APRIL 2020: 28 - 36
http://jfkip.umuslim.ac.id/index.php/asimetris/issue/view/66

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI *MIXTURE* PARETO-NORMAL DAN PENENTUAN FUNGSI RELIABILITASNYA

Vivi Asbar
Dosen Program Studi Teknik Komputer, Universitas Sains Cut Nyak Dhien, Langsa, Indonesia
Alamat email: *vibir_asbar@yahoo.com*

ABSTRAK. Analisa data uji hidup adalah salah satu analisa statistik yang membahas tentang daya tahan hidup suatu bahan atau individu pada keadaan operasional tertentu. Ada beberapa distribusi yang terdapat dalam analisa data uji hidup. Diantaranya adalah distribusi Pareto dan distribusi Normal. Dalam penelitian ini gabungan dari distribusi Pareto dan distribusi Normal akan menghasilkan distribusi *Mixture* Pareto-Normal (MPN). Peluang sukses pada distribusi Pareto dan peluang gagal pada distribusi Normal dimana fungsi distribusi MPN akan bernilai nol, positif atau negatif dengan parameter-parameter peluang sukses dan peluang gagal yang berbeda. Untuk mengestimasi parameter dari distribusi MPN menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dengan Algoritma EM (Ekspektasi Maksimasi) dan menentukan fungsi Reliabilitasnya. Estimator parameter yang masih implisit dapat diselesaikan dengan metode Newton-Raphson didasarkan pada pemakaian turunan (yaitu kemiringan), taksirannya menggunakan deret Taylor. Prosedur E menentukan fkp (fungsi kepadatan peluang) distribusi MPN, melog-kan, menentukan ekspektasi bersyarat dan mensubstitusikan distribusi Normal dan distribusi Pareto pada persamaan fkp distribusi MPN yang sudah dilog-kan. Prosedur M mendapatkan estimator dari parameter-parameter distribusi MPN yang sudah didifferensialkan yaitu $\hat{p},\hat{\alpha},\hat{\mu},\hat{\sigma}$ diperoleh hasil yang eksplisit. Sedangkan estimator $\hat{\beta}$ diperoleh masih dalam bentuk fungsi implisit (masih mengandung parameter β itu sendiri pada distribusi Pareto). Penentuan fungsi Reliabilitas dari distribusi MPN dengan mensubstitusikan distribusi MPN dengan peluang sukses yang bernilai positif pada fungsi Reliabilitas *Mixture* karena peluang sukses yang bernilai positif akan dapat menentukan fungsi Reliabilitas dari distribusi MPN. Sehingga daya tahan hidup dengan menggunakan distribusi MPN dapat dilakukan.

Kata Kunci: : Distribusi *Mixture* Pareto-Normal, Algoritma EM, Reliabilitas, Metode *Newton Raphson*

I. PEDAHULUAN

Analisa data uji hidup adalah salah satu analisa statistik yang membahas tentang daya tahan hidup suatu bahan atau individu pada keadaan operasional tertentu. Penerapan dari analisa ini biasanya banyak dilakukan dibagian kedokteran yaitu berkaitan dengan pemodelan ketahanan hiduppenderita penyakit tertentu (kutipan jurnal Savitri, 2005 dari buku Lee, 1992), dan di bagian produksi berkaitan dengan pemodelan tentang ketahanan hidup benda-benda produksi (kutipan jurnal Savitri, 2005 dari buku Barlow dan Proschan, 1996). Menurut (Wolstenholme, 1999 kutipan jurnal Savitri, 2005), ketahanan hidup benda-benda produksi ini biasanya disebut keandalan atau Reliabilitas (*Reliability*). Reliabilitas merupakan suatu hal pokok dalam pengukuran suatu alat, baik dalam sistem produksi maupun dalam sistem pelayanan. Reliabilitas dapat dipandang sebagai indikator kualitas suatu produk (bagus tidaknya suatu barang). Reliabilitas mesin produksi yang tinggi maka kelancaran produksinya akan dapat dijamin tinggi, sebaliknya Reliabilitas mesin produksi yang rendah maka kelancaran produksinya juga buruk. Untuk mengetahui Reliabilitas suatu produk hasil industri atau ketahanan individu penderita penyakit tertentu maka diperlukan suatu uji hidup (kutipan jurnal Savitri, 2005 dari buku Prihartanti, 2002). Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengestimasi parameter dari distribusi MPN menggunakan metode MLE dengan Algoritma EM dan menentukan fungsi Reliabilitas dari distribusi MPN.

II. METODE PENELITIAN

1. Sifat Penulisan

Adapun sifat penulisan ini adalah berbentuk studi literatur. Ruang lingkup penulisan ini hanya terbatas pada penentuan fungsi Reliabilitas dari gabungan distribusi Pareto dan distribusi Normal (distribusi MPN).

2. Prosedur Analisis

A. Mengestimasi parameter-parameter distribusi MPN dengan metode *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) yaitu dengan Algoritma EM:

- Tahap E

1. Menentukan fkp (fungsi kepadatan peluang) distribusi Pareto
2. Menentukan fkp distribusi Normal
3. Menentukan fkp dari distribusi MPN
4. Menentukan fungsi *Likelihood* dari distribusi MPN
5. Me-log-kan fungsi *Likelihood* tersebut
6. Menghitung ekspektasi bersyarat dari data lengkap log-*Likelihood*

- Tahap M

1. Mendifferensialkan hasil ekspektasi tersebut terhadap parameter-parameter distribusi MPN
2. Hasil dari differensial tersebut dinormalisasikan (persamaan normal)
3. Mendapatkan estimator dari parameter-parameter distribusi MPN

B. Menentukan fungsi Reliabilitas MPN dengan prosedur sebagai berikut:

- Menentukan fkp distribusi MPN
- Mengintegralkan fkp MPN dengan batas *t* sampai dengan ∞

Teknik Pendugaan Parameter

Menurut Freund dan Walpole (1962, hal: 223, edisi ke-empat), teknik pendugaan parameter dari suatu distribusi peluang yang sering digunakan adalah:

1. *Moment Generating Function* (*MGF*)

Fungsi Pembangkit Momen adalah:

$$M(t) = E\left(e^{tx}\right) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) & bila\ x\ diskrit \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx & bila\ x\ kontinu \end{cases}$$

2. *Maximum Likelihood Estimate* (MLE)

Metode ini untuk menentukan MLE (Maximum Likelihood Estimate). Dari suatu populasi $f(x;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)$ akan ditentukan estimator $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,...,\hat{\theta}_k$ berdasarkan sampel acak $X_1, X_2,..., X_n$.

Misalkan $X = (X_1, X_2,..., X_n)$ dan $\theta = (\theta_1, \theta_2,..., \theta_k)$

$$f(x;\theta) = f(x_1, x_2,..., x_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) = f(x_1, x_2,..., x_n;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \qquad (1)$$

$L(\theta) = f(\theta|x)$ yang merupakan fungsi dari parameter θ berdasarkan sampel acak $X_1, X_2,..., X_n$ disebut fungsi Likelihood dan nilai-nilai θ yang memaksimumkan $L(\theta)$ disebut (MLE) dari $\theta;\hat{\theta} =$ MLE (θ) (Amry & Ani, 2004).

3. Algoritma EM (*Ekspektasi Maksimasi*)

Pada MLE umumnya diperlukan suatu metode numerik, diantaranya menggunakan Algoritma Newton-Raphson dan Algoritma Gauss-Newton. Pada Algoritma EM secara analisa statistik terdapat beberapa permasalahan diantaranya:

- Beberapa bagian data yang hilang, untuk penganalisaan menyangkut datanya tidak lengkap akan menjadi rumit bila modelnya berbentuk nonlinier.
- Apabila dapat mengisi data yang hilang, maka penganalisaannya termasuk data yang lengkap.

4. Metode *Newton-Raphson*

Salah satu permasalahan yang sering timbul dalam menentukan akar-akar dari suatu persamaan adalah jika persamaan tersebut tidak linier. Untuk permasalahan ini, metode Newton-Raphson dapat digunakan untuk mendapatkan akar-akar dari persamaan tersebut.

5. Fungsi Distribusi Peluang
   1. Distribusi Normal

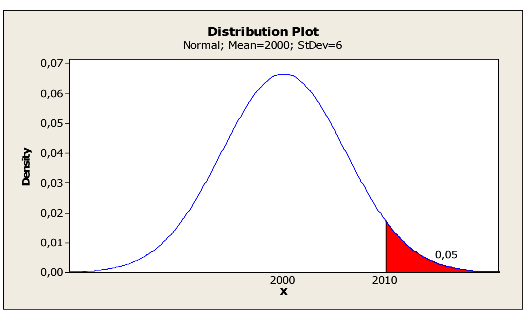
Distribusi Normal adalah salah satu distribusi teoritis dari peubah acak kontinu. Distribusi Normal sering disebut distribusi *Gauss*, sesuai nama pengembangnya, yaitu Karl Gauss pada abad ke-18, seorang ahli matematika dan astronomi (Supranto, 1995).
Distribusi Normal untuk peubah acak *T* memiliki bentuk fungsi sebagai berikut:

$$f(t:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

Untuk $-\infty < t < \infty$, $\sigma > 0$, dengan *t* = peubah waktu, $\pi =$ konstanta, $\sigma =$ simpangan baku, $\mu =$ rata-rata *t*, *e* = konstanta.

Untuk melihat plot distribusi Normal, penulis mencoba membangkitkan data dengan nilai $\mu = 2000,\ \sigma = 6$.

- dengan menggunakan program Minitab



fungsi sebagai berikut:

$$f(x:\lambda)=\frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}\ ,\ 0\le x<\infty\ ,\ \lambda>0 \quad (3)$$

Dimana, $x =$ peubah acak, $\lambda =$ rata-rata populasi x, $e =$ konstanta.

Sebaran ini banyak digunakan untuk memodelkan waktu hingga munculnya suatu kejadian tertentu (terjadinya kegagalan suatu mesin dan sebagainya). Distribusi peluang Eksponensial dapat juga digunakan untuk melakukan perkiraan atau prediksi, dengan hanya membutuhkan perkiraan rata-rata populasi (Ariani, 2004).

Salah satu distribusi lain yang termasuk keluarga Eksponensial adalah distribusi Pareto.

3. Distribusi Pareto

Distribusi Pareto adalah distribusi ketahanan hidup yang berkaitan dengan peubah waktu (Savitri, 2005). Fungsi distribusi Pareto untuk peubah acak *T* yaitu:

$$f(t)=p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right)+(1-p) \quad (4)$$

Untuk $-\infty < t < \infty$, dimana α adalah parameter bentuk (shape) dengan α > 0, β adalah parameter skala (scale) dengan β > 0, *p* menyatakan peluang sukses dari suatu kejadian dan *q* menyatakan peluang gagal dari suatu kejadian, dimana *p* + *q* = 1 untuk $0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1$.

III. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Estimasi Parameter Distribusi *Mixture* Pareto-Normal dengan Metode MLE dan Penentuan Fungsi Reliabilitas

1. Distribusi *Mixture* Pareto-Normal (MPN)

Distribusi MPN adalah suatu peluang sukses dikalikan distribusi Pareto ditambah dengan suatu peluang gagal dikalikan dengan distribusi Normal. Gabungan dari distribusi Pareto dan distribusi Normal maka akan menghasilkan distribusi MPN.

$$F(t)=p\sum f(t)+(1-p)\int f(t)\ dt$$

(Anonim2, 2007).

Distribusi MPN disusun oleh parameter-parameter $(p,\alpha,\beta,\mu,\sigma)$ dengan menggunakan peubah acak *T*. Distribusi MPN untuk peubah acak *T* memiliki fkp yaitu:

$$f_{mix}(t;\psi)=p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right)+(1-p)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right) \quad (5)$$

Dengan; $\psi = \left(\left(f_p(t), f_N(t)\right)\right)$, dimana; $f_p(t) = p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right) + (1-p)$ adalah fungsi distribusi Pareto dan $f_n(t) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)$ adalah fungsi distribusi Normal.

Tabel 1. Nilai Distribusi *Mixture* Pareto-Normal dengan Parameter Peluang Sukses dan Peluang Gagal yang Berbeda

No.	Distribusi Mixture Pareto-Normal $f_{mix}(t;\psi)$	Variabel waktu (*t*)	Parameter			
			Sukses (*p*)		Gagal (*q*)	
			α	β	μ	$\sigma^2, \sigma^2 \neq 0$
I	$y<0$ $y<0$ $y>0$ $y>0$	$t=0$	$\alpha=0$	$\beta=0$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu>0$ $\mu<0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
II	$y<0$ $y<0$ $y>0$ $y>0$	$t>0$ $t<0$ $t>0$ $t<0$			$\mu=0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
III	$y<0$ $y<0$ $y>0$ $y>0$	$t=0$	$\alpha<0$ $\alpha = ganjil$	$\beta<0$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu>0$ $\mu<0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
IV	$y<0$ $y>0$ $y>0$ $y<0$	$t>0$ $t<0$ $t>0$ $t<0$			$\mu=0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
V	$y<0$ $y<0$ $y>0$ $y>0$	$t=0$	$\alpha<0$ $\alpha = genap$	$\beta<0$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu>0$ $\mu<0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
VI	$y<0$ $y>0$ $y>0$ $y<0$	$t>0$ $t<0$ $t>0$ $t<0$			$\mu=0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
VII	$y>0$ $y>0$ $y>0$ $y>0$	$t=0$	$\alpha>0$	$\beta>0$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu>0$ $\mu<0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
VIII	$y>0$ $y>0$ $y>0$ $y>0$	$t>0$ $t<0$ $t>0$ $t<0$			$\mu=0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$

Tabel 2. Urutan Peluang Sukses (*p*) yang paling Besar dengan Peluang Gagal (*q*)

No.	Peluang Sukses (*p*)		Peluang Gagal (*q*)	
1	$\alpha>0$	$\beta>0$	$\mu>0$ $\mu<0$ $\mu>0$ $\mu<0$ $\mu=0$	$\sigma^2>0$ $\sigma^2>0$ $\sigma^2<0$ $\sigma^2<0$
2	$\alpha=0$	$\beta=0$		
3	$\alpha<0$ $\alpha = ganjil$	$\beta<0$		
4	$\alpha<0$ $\alpha = genap$	$\beta<0$		

Dari tabel diatas peluang sukses dapat diurutkan dari yang paling besar sampai yang paling kecil (dilihat dari fungsi MPN (*y*) yang bernilai positif sampai negatif). Itu dapat dilihat dari tabel 1 dengan fungsi distribusi MPN pada kondisi nomor VII dan VIII yang semuanya bernilai positif. Sedangkan peluang gagal hanya dapat ditentukan dari peluang suksesnya sehingga besarnya nilai dari parameter peluang gagalnya dapat ditentukan tetapi tidak mempunyai peluang gagal paling besar (kondisi pada nomor I sampai dengan VIII sama).

2. **Estimasi Paramater Distribusi *Mixture* Pareto-Normal**

Dalam mengestimasi parameter-parameter pada distribusi MPN digunakan metode MLE dengan menggunakan Algoritma EM. Dimana Algoritma EM terdiri dari dua tahap yaitu tahap E dan tahap M.

2.1 Prosedur Analisis Algoritma EM

Prosedur EM terdiri dari 2 tahap yaitu tahap E dan tahap M.

Prosedur E

a. Fkp Distribusi Pareto untuk peubah acak *T* yaitu: (lihat persamaan 4)
b. Fkp Distribusi Normal untuk peubah acak *T* yaitu: (lihat persamaan 2)
c. Fkp Distribusi MPN untuk peubah acak *T* yaitu:
   Fkp distribusi MPN untuk peubah acak *T* diperoleh dengan cara membuat fungsi distribusi gabungan persamaan (2) dan (4), yaitu: (lihat persamaan 5).
d. Menentukan fungsi Likelihood dari distribusi MPN.

Untuk penerapan dari Algoritma EM, data observasi $t_{obs} = (t_1, ..., t_n)$ dianggap sebagai data tidak lengkap. Data lengkap disini adalah data yang memuat data tidak lengkap dan data yang tidak teramati, sedangkan data tidak lengkap adalah data sampel yang diacak dari data populasi. Oleh karena itu, metode MLE tidak dapat langsung digunakan sehingga diperkenalkan variabel Z_{ij}, Z_{ij} merupakan variabel yang tak teramati, dengan:

$$Z_{ij}\begin{cases}1, & t_i \in G_i \\ 0, & t_j \notin G_i\end{cases} \qquad (6)$$

Dimana:

$t_i =$ data yang teramati pada ruang sampel G_i

$t_i =$ data yang tidak teramati pada ruang sampel G_i

$G_i =$ subpopulasi ke-i (ruang sampel observasi ke-i)

Jadi, data lengkap $x_c, x_c = (x_1, ..., x_n)$ dimana $x_1 = (t_1, z_1), ..., x_n = (t_n, z_n)$ memuat data observasi $t_{obs} = (t_1, ..., t_n)$ dan data yang tidak teramati $z_{ij}\,(i = 1, ..., g,\ j = 1, ..., n)$

Fkp dari data lengkap (x_c) adalah:

$$f(x_c) = \prod_{i=1}^{g} \{pf_i(t_j;\theta_i)\}^{z_{ij}} \qquad (7)$$

Dari fkp data lengkap (x_c) persamaan (7) diatas dapat ditentukan fungsi Likelihood data lengkap (x_c) yaitu:

$$f(x_c) = \prod_{i=1}^{g} \{pf_i(t_j;\theta_i)\}^{z_{ij}}$$

$$= \prod_{i=1}^{g}\prod_{j=1}^{n} \{pf_i(t_j;\theta_i)\}^{z_{ij}}$$

Sehingga fungsi Likelihood data lengkap dapat dituliskan:

$$L_c(\psi; x_c) = \prod_{i=1}^{g}\prod_{j=1}^{n} \{pf_i(t_j;\theta_i)\}^{z_{ij}} \quad (8)$$

e. Me-log-kan fungsi Likelihood data lengkap

   Dari persamaan (8) dapat ditentukan fungsi log-Likelihood data lengkapnya yaitu dengan me-log-kan persamaan (8)

$$\log L_c(\psi) = \log\left[\prod_{i=1}^{g}\prod_{j=1}^{n} \{pf_i(t_j;\theta_i)\}^{z_{ij}}\right]$$

Sehingga fungsi log-Likelihood data lengkap dapat dituliskan:

$$\log L_c(\psi) = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \log\{pf_i(t_j;\theta_i)\} \quad (9)$$

f. Menentukan ekspektasi bersyarat dari log-Likelihood data lengkap

Pada tahap E yaitu menentukan nilai ekspektasi bersyarat dari log-Likelihood data lengkap. Berdasarkan persamaan (9) maka dapat ditentukan nilai ekspektasinya sebagai berikut:

$$E\left(\log L_c(\psi)\right) = E\left[\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\log\left\{pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right\}\right] \quad (10)$$

Fungsi log-Likelihood diatas merupakan fungsi bersama dari *g* sub populasi dimana sebagian sub populasi berdistribusi Pareto dan sebagian lagi berdistribusi Normal. Untuk 2 (dua) sub populasi, dimana satu sub populasi berdistribusi Normal $\left(\mu,\sigma^2\right)$ dan satu sub populasi lagi berdistribusi Pareto $\left(p,\alpha,\beta\right)$ maka Ekspektasi dari fungsi log-Likelihood kedua sub populasi tersebut diperoleh:

$$E\left[\log L_c(\psi;x_c)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}\log pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} E\left[z_{ij}\log pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} E\left(z_{ij}\right)\log\left\{pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right\}$$

(Menurut Bohning dan Nityasuddhi, 2003 dari kutipan jurnal Savitri, 2005) dapat dituliskan:

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = E\left(\log L_c(\psi)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} E\left(z_{ij}\right)\log\left\{pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right\}$$

Karena $Z_{ij}^{(k)} = E\left(Z_{ij}\right)$ (Bohning dan Nityasuddhi, 2003 dari kutipan jurnal Savitri, 2005) maka:

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^{(k)}\log\left\{pf_i\left(t_j;\theta_i\right)\right\} \quad (11)$$

Dengan mensubstitusikan fkp dari distribusi Pareto dan distribusi Normal pada persamaan (11) diperoleh:

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log\left\{pf_1\left(t_j;\theta_1\right)\right\} + \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left\{qf_2\left(t_j;\theta_2\right)\right\}$$

(12)

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log\left\{pf_1\left(t_j;\alpha,\beta\right)\right\} + \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left\{qf_2\left(t_j;\mu,\sigma^2\right)\right\}$$

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log\left\{p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right)\right\}}_{M\ =\ \text{Pareto}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left[q\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right)\right]}_{N\ =\ \text{Normal}}$$

Dimisalkan persamaan:

$\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log\left[p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right)\right]$ adalah *M* untuk

diselesaikan:

$$M = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log\left[p\left(\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+1}}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\log p + \log\alpha + \log\beta - (\alpha+1)\log\left(\beta+t_j\right)$$

Dimisalkan persamaan:

$\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left[(q)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$ adalah N

untuk diselesaikan:

$$N = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left[(q)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

Dimana $p+q=1$, sehingga $q=1-p$ $\quad 0\le p\le 1,\ \ 0\le q\le 1$

$$N = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log\left[(1-p)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log(1-p) - \log\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\log e$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log(1-p) - \log\sigma - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\log(1-p) - \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2$$

Kemudian hasil dari M (Pareto) dan N (Normal) dijumlahkan seperti pada persamaan (12) diperoleh:

$$M + N = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)} \log p + \log \alpha + \log \beta - (\alpha+1)\log\left(\beta + t_j\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} \log(1-p) - \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2$$

$$Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\left[\log p + \log\alpha + \alpha\log\beta + (\alpha+1)\log\left(\beta+t_j\right)\right] +$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\left[\log(1-p) - \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (13)$$

Prosedur M

Selanjutnya pada tahap M ini adalah memaksimalkan $E(\log L_c(\psi))$, dengan menggunakan MLE.

a. Mendifferensialkan hasil ekspektasi dari data lengkap log-Likelihood terhadap parameter-parameter distribusi MPN.
   Fungsi $Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right)$ pada persamaan (13) didifferensialkan terhadap parameter p,α,β pada distribusi Pareto dan parameter μ,σ pada distribusi Normal.

Didifferensialkan terhadap parameter distribusi Pareto:

Parameter *p*:

$$\frac{\partial}{\partial p}Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\left[\frac{\partial}{\partial p}\log p + 0\right] + \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\left[\frac{\partial}{\partial p}\log(1-p)\right]$$

Parameter α :

$$\frac{\partial}{\partial p}Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\left[0 + \frac{1}{\alpha} + \log\beta - \log(\beta+t)\right] + 0$$

Parameter β :

$$\frac{\partial}{\partial p}Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{(\alpha+1)}{\beta+t}\right) + 0$$

Didifferensialkan terhadap parameter distribusi Normal:

Parameter μ :

$$\frac{\partial}{\partial p}Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} \frac{\partial}{\partial\mu}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Parameter σ :

$$\frac{\partial}{\partial p}Q\left(\psi,\psi^{(k)}\right) = 0 + \sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}\left[0 - \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{\partial}{\partial}\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

b. Lalu hasil dari differensial tersebut dinormalisasi untuk mendapatkan estimator dari parameter-parameter $p,\alpha,\beta,\mu,\sigma$ pada distribusi MPN.
   - Estimator dari parameter-parameter distribusi Pareto (p,α,β):

Hasil dari differensial terhadap parameter *p* dinormalisasikan diperoleh:

$$\hat{p}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}}{n} \quad (14)$$

Hasil dari differensial terhadap parameter α dinormalisasikan diperoleh:

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)} \log\left(\frac{\hat{\beta}^{(k+1)} + t_j}{\hat{\beta}^{(k+1)}}\right)} \quad (15)$$

Hasil dari differensial terhadap parameter β tidak dapat diselesaikan secara analitis yaitu tidak dapat diselesaikan dengan cara penghitungan sehingga masih dalam bentuk fungsi implisit yaitu persamaan ini tidak bebas, masih mengandung parameter β itu sendiri dalam distribusi Pareto. Disarankan para peneliti lain yang ingin melanjutkan penyelesaiannya.

- Estimator dari parameter-parameter distribusi Normal (μ,σ)

Hasil dari differensial terhadap parameter μ dinormalisasikan diperoleh:

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} t_j}{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}} \tag{16}$$

Hasil dari differensial terhadap parameter σ dinormalisasikan diperoleh:

$$\hat{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} \left(t_j - \hat{\mu}^{(k=1)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}}} \tag{17}$$

c. Pada langkah b estimator dari parameter-parameter $p, \alpha, \beta, \mu, \sigma$ sudah diperoleh hasil yang eksplisit, sedangkan estimator dari parameter β yang diperoleh masih dalam bentuk fungsi implisit. Diperlukan metode Newton-Raphson untuk mendapatkan nilai estimasi parameter β. Disarankan untuk peneliti lain yang ingin melanjutkan penyelesaiannya.

d. Mendapatkan estimator dari parameter-parameter distribusi MPN p, α, μ, σ . Maka diperoleh masing-masing estimator yaitu:

Estimator parameter *p*:

$$\hat{p}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}}{n}$$

Estimator parameter α :

$$\hat{\alpha}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)}}{\sum_{j=1}^{n} z_{1j}^{(k)} \log\left(\frac{\hat{\beta}^{(k+1)} + t_j}{\hat{\beta}^{(k+1)}}\right)}$$

Estimator parameter μ :

$$\hat{\mu}^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} t_j}{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)}}$$

Estimator parameter σ :

$$\hat{\sigma}^{(k+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}^{(k)} \left(t_j - \hat{\mu}^{(k+1)}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} z_{2j}}}$$

3. **Penentuan Fungsi Reliabilitas Distribusi *Mixture* Pareto-Normal**

Dalam menentukan fungsi Reliabilitas dari distribusi MPN, langkah awal yang dilakukan adalah menentukan fkp distribusi MPN. Menurut Wolstenholme (1999), fungsi Reliabilitas *Mixture* adalah:

$$R_{mix}(t) = \int_{t}^{\infty} f_{mix}(x;\psi)\,dx \tag{18}$$

a. Menentukan fkp distribusi MPN (lihat persamaan 5).
b. Mengintegralkan fkp MPN dengan batas *t* sampai dengan ∞.
Mensubstitusikan persamaan (5) pada persamaan (18):

Sehingga fungsi Reliabilitas distribusi MPN adalah:

$$R_{mix}(t) = p\left(\frac{\beta}{\beta + t}\right)^{\alpha} + q\int_{t}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{19}$$

Yang dinyatakan dalam peluang sukses dikalikan dengan fungsi Reliabilitas Pareto ditambah peluang gagal dikalikan dengan integral distribusi Normal dalam selang (t, ∞).

Setelah estimator-estimator diperoleh dari parameter-parameter distribusi MPN, selanjutnya dapat ditentukan fungsi Reliabilitasnya dengan mendapatkan nilai estimator dari distribusi MPN. Dengan fungsi Reliabilitas distribusi MPN yang diperoleh dapat dikatakan bahwa indikator kualitas suatu produk dapat menjamin bagus atau tidaknya suatu barang produksi selama waktu tertentu dapat diketahui melalui $R_{mix}(t)$.

IV. SIMPULAN

1. Fungsi distribusi MPN dengan peubah waktu *t* yang berbeda akan menghasilkan nilai yang bervariasi dari parameter-parameter peluang sukses dan peluang gagal yang berbeda.
2. Peluang gagal pada distribusi Normal hanya dapat ditentukan dari peluang suksesnya pada distribusi Pareto sehingga besarnya nilai dari parameter peluang gagalnya dapat ditentukan tetapi tidak mempunyai peluang gagal paling besar.
3. Estimator-estimator dari fungsi distribusi MPN untuk metode MLE dengan menggunakan Algoritma EM adalah: $\hat{\alpha}, \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{p}$
4. Estimator $\hat{\beta}$ tidak dapat diselesaikan secara analitis sehingga masih dalam bentuk fungsi implisit (masih mengandung parameter β itu sendiri dalam distribusi Pareto).
5. Fungsi Reliabilitas distribusi MPN adalah peluang sukses dikalikan dengan fungsi Reliabilitas Pareto ditambah peluang gagal dikalikan dengan integral distribusi Normal dalam selang (t, ∞).

Saran

1. Bagi pembaca yang berminat dengan mengestimasi parameter distribusi MPN untuk mendapatkan penyelesaian nilai estimasi parameter β dapat digunakan metode *Newton - Raphson*. Disarankan untuk peneliti lain yang ingin melanjutkan penyelesaian nya.
2. Dalam menganalisa data uji hidup dengan menggunakan distribusi MPN dapat dilanjutkan dengan studi kasus.
3. Selanjutnya dapat mencari informasi mengenai distribusi MPN terutama pada peluang sukses dan peluang gagalnya secara stokastik.
4. Mencari standar error dari EM Algoritma model *mixed* Pareto-Normal dan estimasi modelnya.

DAFTAR PUSTAKA

Amry., dkk. 2004. Jurnal Statistik (Pendekatan Kuantitatif dalam Manajemen Kualitas), Yogyakarta

Anonim1. 1999. *RACH Capacity Analysis-Packet 1, TSG-RAN Working Group 1 meeting* #6 Espoo, Finland., InterDigital Comm. Corp

Anonim2. 2007. Mixed Distribution, diakses dari http://www.math.uny.ac.id /sahid/ prob/ dist.html. [13 Juli 2019].

Freund, J. E & Walpole, R.E. 1962. Mathematical Statistics, Fifth Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Khairiani. 2002. Pengembangan Model Regresi Masa Hidup dengan Menggunakan Model Regresi Weibull, Skripsi, Universitas Syiah Kuala: Banda Aceh.

Miftahuddin. 2007. Pengantar Model Linier, Buku Ajar, FMIPA Unsyiah.

Mood, M. A. 1974. *Introduction to The Theory of Statistics, Third Edition*. McGraw-Hill, Inc., USA

Supranto. 1995. Teori dan Aplikasi, Edisi Kelima, Jilid Dua, Erlangga, Jakarta..

Savitri Rahmi Dian., dkk. 2005. Jurnal Statistika, Ikatan Perstatistikan Indonesia, Jakarta.

9 772721 872006